دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

«تمرین درس دینامیک سازه ها»

مجموعه تمرینات سری سوم

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

زمان تحویل: ۹۰/۹/۵

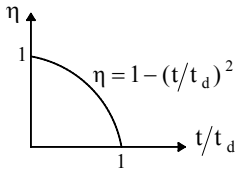
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

سینا کاظم زاده آزاد شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

مجموعه تمرینات شماره ۳ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۹/۵)

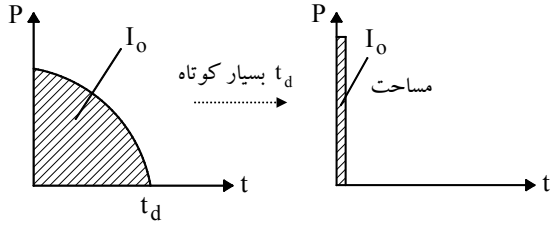
۱) سیستم جرم فنری با جرم m و سختی k و نسبت میرایی ξ برابر ۴۰٪ تحت بارگذاری دینامیکی زیر قرار می گیرد. نشان دهید که ضریب بزرگنمایی دینامیکی زیر برای سیستم قابل استفاده است در صورتی که زمان اِعمال بار ضربه ای بسیار کوتاه فرض شده و در واقع ($t_d/T_n \le ۰/۲۵$) در نظر گرفته شود.

$$P(t)=\begin{cases} P_o\eta(t) & ۰\le t<t_d \\ ۰ & t_d\le t \end{cases}$$



$$R_d=\frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{t_d}{T_n}\right)\exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}\sin^{-۱}\sqrt{۱-\xi^۲}\right)$$

جواب: در کتب مرجع[۱] ذکر می شود که چنان چه مدت زمان بار ضربه ای بسیار کوتاه باشد (که عموماً مقدار ($t_d/T_n \le ۰/۲۵$) به عنوان بار بسیار کوتاه منظور می شود)، می توان با تقریب مناسبی بارگذاری دینامیکی را با یک **تک پالس**[۲] معادل نمود. در واقع در این مراجع ذکر می شود که در بارهای ضربه ای بسیار کوتاه، شکل تابع بارگذاری در مقدار **حداکثر پاسخ** مؤثر نبوده و می توان آن را با یک ضربه لحظه ای که همان تکانه خطی را دارا باشد معادل کرد. لذا مطابق شکل زیر یک بارگذاری معادل داریم:



بار تک پالسِ معادل با همان تکانه خطی به سازه اعمال می شود

$$I_o=\int_o^{t_d}P(t)\,dt=P_o\int_o^{t_d}۱-\left(\frac{t}{t_d}\right)^۲dt=\frac{۲}{۳}P_o t_d$$

---

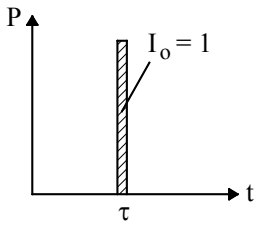
[۱] Dynamics of Structures, R. W. Clough & J. Penzien, 1995 , **Page 82**
Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995 , **Page 146**

[۲] Unit Impulse

* بر این اساس در ادامه لازم است سازه تحت یک تک پالس مورد بررسی قرار گیرد. بر مبنای مطالب ارائه شده در کلاس درس، پاسخ سیستم دارای میرایی تحت بار تک پالس به شکل زیر قابل تعیین است:

پاسخ سیستم دارای میرایی تحت بار تک پالس:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\xi\varpi_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)] \quad , \quad t\geq\tau$$



رابطه فوق در حالتی صادق است که مطابق شکل مقابل، تکانه حاصل از پالس (مساحت زیر نمودار بارگذاری بر حسب زمان) برابر واحد باشد. در شکل صفحه قبل مساحت زیر نمودار بر اساس پارامتر I_o محاسبه شده است؛ لذا پاسخ سیستم (خطی) را لازم است از ضرب $u(t)$ فوق در I_o صفحه قبلی تعیین نمود. حال با داشتن پاسخ سیستم می توان حداکثر پاسخ را تعیین نموده و ضریب بزرگنمایی دینامیکی را از آن محاسبه کرد. داریم:

$$u(t)=\frac{I_o}{m\omega_D}e^{-\xi\varpi_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)] \xrightarrow[I_o=2P_o t_d/3]{\tau=0} u(t)=\frac{2P_o t_d}{3m\omega_D}e^{-\xi\varpi_n t}\sin(\omega_D t)$$

$$u(t)=\frac{2P_o t_d}{3m\omega_n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\varpi_n t}\sin(\omega_D t)=\frac{P_o}{k}\frac{4\pi}{3}\frac{t_d}{T_n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\varpi_n t}\sin(\omega_D t)$$

$$u(t)=(u_o)_{st}\frac{4\pi}{3}\frac{t_d}{T_n}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\varpi_n t}\sin(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2})$$

برای تعیین حداکثر جا به جایی:

$$\dot{u}(t)=(u_o)_{st}\frac{4\pi}{3}\frac{t_d}{T_n}\omega_n e^{-\xi\varpi_n t}\left[\cos(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2})-\frac{\xi\sin(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]=0$$

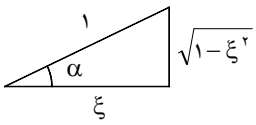
با حل معادله مقدار زمان در لحظه حداکثر جا به جایی حاصل می شود:

$$\boxed{t_{cr}=\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

در نتیجه:

$$u_o = u(t_{cr}) = (u_o)_{st}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{t_d}{T_n}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{\frac{-\xi\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}}}\,\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

* برای ساده سازی رابطه فوق می توان بر اساس مثلثات و شکل مقابل نوشت:



$$\left.\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)&=\alpha\\ \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1}\right)&=\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)=\sin^{-1}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)}\ (1)$$

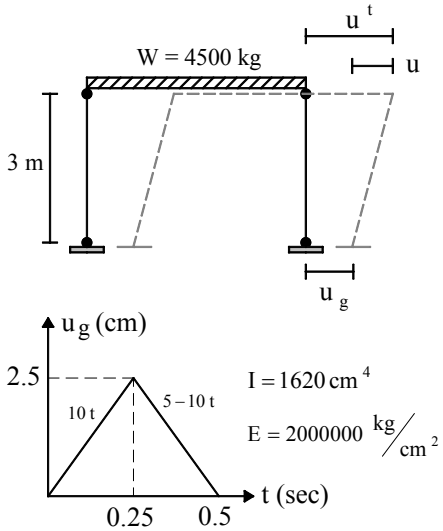
$$\left.\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)&=\alpha\\ \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1}\right)&=\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]=\sin\alpha=\sqrt{1-\xi^2}}\ (2)$$

* نهایتاً با جاگذاری روابط ۱ و ۲ در رابطه بالای صفحه ضریب بزرگنمایی دینامیکی حاصل می شود:

$$u_o = (u_o)_{st}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{t_d}{T_n}\,e^{\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin^{-1}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)} \Rightarrow \boxed{R_d = \frac{4\pi}{3}\,\frac{t_d}{T_n}\exp\left(\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin^{-1}\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

---

۲) قابی مطابق شکل مقابل تحت **جا به جایی** زمین بر اساس دیاگرام زیر قرار دارد. مطلوبست تعیین حداکثر جا به جایی **مطلق** سیستم و زمان متناظر با این جا به جاییِ ماکزیمم. از وزن ستون ها صرفنظر شده است و وزن کف صلب، مدول الاستیسیته و ممان اینرسی ستون در شکل مشخص شده است. میرایی سیستم صفر منظور شده است.



جواب: بر اساس دیاگرام جا به جایی زمین از صفحه قبل مشخص است که شتاب حرکت زمین برابر صفر می باشد. اصولاً عوامل ایجاد حرکت دینامیکی در یک سیستم بار خارجی، شتاب زمین و شرایط اولیه می باشند. در این سؤال بار خارجی و شتاب زمین برابر صفر می باشند، لذا تنها عامل مؤثر در معادله حرکت شرایط اولیه می باشد. همچنین در حالت حرکت زمین معادله به صورت $\boxed{m\ddot{u} + ku = -m\ddot{u}_g}$ می باشند، که بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درس می دانیم که در این فرمول بندیِ خاص، مقادیر u، $\dot{u}$ (که در شرایط اولیه معادله حرکت موجود می باشد) و $\ddot{u}$ نشانگر جا به جایی **نسبی**، سرعت **نسبی** و شتاب **نسبی** کفِ صلب نسبت به نقاط تکیه‌گاهی می باشند. برای مثال سرعت نسبی ($\dot{u}$) برابر سرعت مطلق کف صلب منهای سرعت مطلق تکیه گاه می باشد. بر این اساس مسأله در سه فاز حل می‌شود:

فاز اول: $\boxed{۰ \le t < ۰/۲۵}$

* سیستم بدون میرایی تحت ارتعاش آزاد می باشد که پاسخ سیستم از رابطه زیر قابل تعیین می باشد:

$$u_۱(t) = \frac{\dot{u}_o}{\omega_n}\sin\omega_n t + u_o\cos\omega_n t \quad , \quad ۰ \le t < ۰/۲۵$$

که در آن:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۲\times(۳EI/L^۳)}{m}} = \sqrt{\frac{۲\times۳\times۲۰۰۰۰۰۰\times۱۶۲۰\div۳۰۰^۳}{۴۵۰۰\div۹۸۱}} = ۱۲/۵۲ \ {}^{rad}\!/_{sec}$$

در ابتدا کف بدون جابه‌جایی | تکیه گاه بدون جابه‌جایی | لذا شرایط اولیه نسبی: $u_o = ۰$

در ابتدا کف بدون سرعت | تکیه گاه با سرعت | لذا شرایط اولیه نسبی: $\dot{u}_o = ۰ - \frac{۲/۵}{۰/۲۵} = -۱۰ \ {}^{cm}\!/_{sec}$

با جاگذاری موارد فوق در پاسخ سیستم:

$$u_۱(t) = -\frac{۱۰}{۱۲/۵۲}\sin(۱۲/۵۲t)$$

لذا جا به جایی مطلق در فاز اول برابر است با:

$$u_۱^t(t) = ۱۰t - \frac{۱۰}{۱۲/۵۲}\sin(۱۲/۵۲t)$$

مقدار حداکثر جا به جایی در این فاز برابر است با:

$$\boxed{u_{۱Max}^t = u_۱^t(۰/۲۵) = ۲/۵\,cm}$$

فاز دوم: $\boxed{۰/۲۵ \le t < ۰/۵}$

* برای استفاده از پاسخ ارتعاش آزاد برای فاز دوم، لازم است پارامتر t به $(t-۰/۲۵)$ تغییر داده شود:

$$u_۲(t) = \frac{\dot{u}_o}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-۰/۲۵)] + u_o\cos[\omega_n(t-۰/۲۵)] \quad , \quad ۰/۲۵ \le t < ۰/۵$$

در ابتدای بازه جا به جایی مطلق کف برابر است با: $u_۱^t(۰/۲۵) = ۲/۵\ cm$

در ابتدای بازه جا به جایی مطلق تکیه گاه برابر است با: $u_g(۰/۲۵) = ۲/۵\ cm$

لذا جا به جایی نسبی کف در ابتدای بازه برابر خواهد بود با: $u_o = u_۱^t(۰/۲۵) - u_g(۰/۲۵) = ۰\ cm$

در ابتدای بازه سرعت مطلق کف برابر است با: $\dot{u}_۱^t(۰/۲۵) = ۲۰\ cm/sec$

در ابتدای بازه سرعت مطلق تکیه گاه برابر است با: $\dot{u}_g(۰/۲۵) = -۱۰\ cm/sec$

لذا سرعت نسبی کف در ابتدای بازه برابر خواهد بود با: $\dot{u}_o = \dot{u}_۱^t(۰/۲۵) - \dot{u}_g(۰/۲۵) = ۳۰\ cm/sec$

با جاگذاری موارد فوق در پاسخ سیستم: $u_۲(t) = \frac{۳۰}{۱۲/۵۲}\sin[۱۲/۵۲(t-۰/۲۵)]$

لذا جا به جایی مطلق در فاز دوم برابر است با: $u_۲^t(t) = ۵ - ۱۰t + \frac{۳۰}{۱۲/۵۲}\sin[۱۲/۵۲(t-۰/۲۵)]$

برای تعیین حداکثر جا به جایی: $\dot{u}_۲^t(t) = -۱۰ + ۳۰\cos[۱۲/۵۲(t-۰/۲۵)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad t_{cr} = ۰/۳۵$

مقدار حداکثر جا به جایی در این فاز برابر است با: $\boxed{u_{۲Max}^t = u_۲^t(۰/۳۵) = ۳/۷۸\,cm}$

فاز سوم: $\boxed{۰/۲۵ \le t < ۰/۵}$

* برای استفاده از پاسخ ارتعاش آزاد برای فاز سوم، لازم است پارامتر t به $(t-۰/۵)$ تغییر داده شود:

$$u_۳(t) = \frac{\dot{u}_o}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-۰/۵)] + u_o\cos[\omega_n(t-۰/۵)] \quad , \quad ۰/۵ \le t$$

در ابتدای بازه جا به جایی مطلق کف برابر است با: $u^t_۲(۰/۵) \approx ۰\ cm$

در ابتدای بازه جا به جایی مطلق تکیه گاه برابر است با: $u_g(۰/۵) = ۰\ cm$

لذا جا به جایی نسبی کف در ابتدای بازه برابر خواهد بود با: $u_o = u^t_۲(۰/۵) - u_g(۰/۵) = ۰\ cm$

در ابتدای بازه سرعت مطلق کف برابر است با: $\dot{u}^t_۲(۰/۵) = -۴۰\ cm/sec$

در ابتدای بازه سرعت مطلق تکیه گاه برابر است با: $\dot{u}_g(۰/۵) = ۰\ cm/sec$

لذا سرعت نسبی کف در ابتدای بازه برابر خواهد بود با: $\dot{u}_o = \dot{u}^t_۲(۰/۵) - \dot{u}_g(۰/۵) = -۴۰\ cm/sec$

با جاگذاری موارد فوق در پاسخ سیستم: $u_۳(t) = -\frac{۴۰}{۱۲/۵۲}\sin[۱۲/۵۲(t-۰/۵)]$

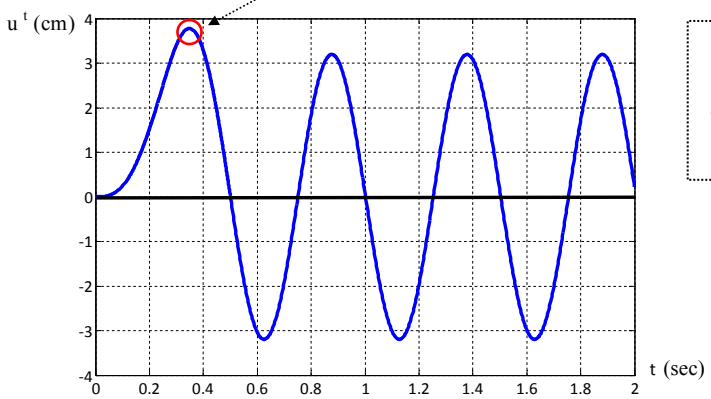
لذا جا به جایی مطلق در فاز سوم برابر است با: $u^t_۳(t) = ۰ - \frac{۴۰}{۱۲/۵۲}\sin[۱۲/۵۲(t-۰/۵)]$

برای تعیین حداکثر جا به جایی: $\dot{u}^t_۳(t) = -۴۰\cos[۱۲/۵۲(t-۰/۵)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad t_{cr} = ۰/۶۲۵$

مقدار حداکثر جا به جایی در این فاز برابر است با: $\boxed{u^t_{۳Max} = u^t_۳(۰/۶۲۵) = -۳/۲۰ cm}$

توجه: فاز سوم به دلیل نبود میرایی در سیستم به صورت ارتعاش آزاد تا بی نهایت باقی خواهد ماند و همچنین به صورت هارمونیک میزان حداکثر و حداقل جا به جایی ($\pm ۳/۲۰\ cm$) در طی آن تکرار خواهد شد. بر اساس نتایج حاصل برای هر سه فاز، می‌توان مقدار حداکثر جا به جایی مطلق را بیان نمود:

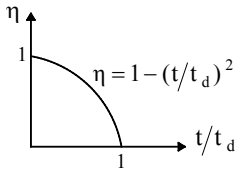
$$t_{cr} = ۰/۳۵\ sec \xrightarrow{\text{In Phase 2}} u^t_{Max} = ۳/۷۸\ cm$$



رسم پاسخ سیستم بر اساس نتایج حاصل به کمک نرم افزار MATLAB

۳) مشابه سؤال شماره ۱، سیستم جرم فنری با جرم m و سختی k و نسبت میرایی ξ برابر ۴۰٪ تحت بارگذاری دینامیکی زیر قرار می گیرد. ضریب بزرگنمایی دینامیکیِ زیر در محدوده ($t_d/T_n \le ۰/۲۵$) برای سیستم در سؤال شماره ۱ به صورت تحلیلی ارائه شد. مطلوبست تعیین ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای حالت ($t_d/T_n = ۰/۲۵$) به **روش نیومارک** و مقایسه آن با نتیجه حاصل از رابطه تحلیلی زیر. بدین منظور با ($\gamma = ۰/۵$, $\beta = ۰/۱۶۷$) پاسخ را در محدوده ($۰ \sim ۰/۵T_n$) و با ($\Delta T = ۰/۱T_n$) بدست آورید.

$$P(t) = \begin{cases} P_o\eta(t) & ۰ \le t < t_d \\ ۰ & t_d \le t \end{cases}$$



$$R_d = \frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{t_d}{T_n}\right)\exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}\sin^{-۱}\sqrt{۱-\xi^۲}\right)$$

جواب: بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درسی و موجود در کتب مرجع[۱]، می توان مراحل روش غیرتکراری نیومارک را به شکل زیرخلاصه نمود. در ابتدا لازم است مقادیر اولیه زیر محاسبه شوند.

$$\ddot{u}_o = \frac{P_o - c\dot{u}_o - ku_o}{m} = \frac{P_o}{m} = \omega_n^۲(u_o)_{st} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{u}_o}{\omega_n^۲(u_o)_{st}} = ۱$$

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{۱}{\beta(\Delta t)^۲}m = k + \frac{۳}{۰/۱T_n}c + \frac{۶}{(۰/۱T_n)^۲}m = ۲۰/۰۲k$$

$$a = \frac{۱}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c = \frac{۶m}{۰/۱T_n} + ۳c = \frac{۶۰c\omega_n}{۲\omega_n\xi\times ۲\pi} + ۳c = ۱۴/۹۳c$$

$$b = \frac{۱}{۲\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{۲\beta} - ۱\right)c = ۳m + ۰/۰۵T_n(۲m\omega_n\xi) = ۳/۲۵m$$

$$\Delta P_i = P[(i+۱)\Delta t] - P[i\Delta t] = -P_o\frac{T_n^۲}{t_d^۲}\frac{۲i+۱}{۱۰۰} = -P_o\left[\frac{۸i+۴}{۲۵}\right] = -P_o\Delta\eta_i$$

با داشتن مقادیر اولیه فوق می توان روند افزایشی نیومارک را در هر جزء زمان با پنج مرحله پیمود.

---

[۱] Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995

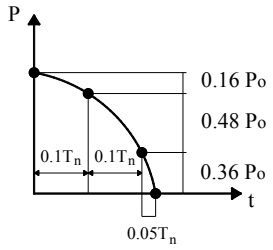
$$۱)\ \Delta\hat{P}_i = \Delta P_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i = (-P_o\frac{۴+۸i}{۲۵}) + ۱۴/۹۳c\dot{u}_i + ۳/۲۵m\ddot{u}_i$$ (فقط برای دو گام اول)

$$۲)\ \Delta u_i = \frac{\Delta\hat{P}_i}{\hat{k}} = \frac{\Delta\hat{P}_i}{۲۰/۰۲k}$$

$$۳)\ \Delta\dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(۱-\frac{\gamma}{۲\beta}\right)\ddot{u}_i = ۴/۷۷۵\Delta u_i\omega_n - ۳\dot{u}_i - ۰/۳۱۴\frac{\ddot{u}_i}{\omega_n}$$

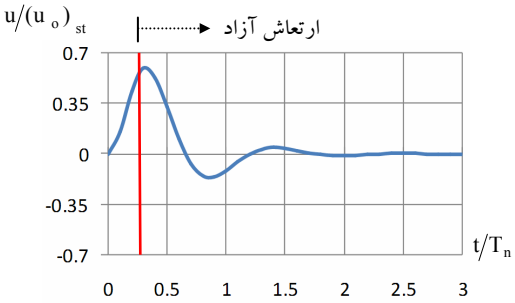
$$۴)\ \Delta\ddot{u}_i = \frac{۱}{\beta\Delta t^۲}\Delta u_i - \frac{۱}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \frac{۱}{۲\beta}\ddot{u}_i = ۱۵/۲۰\omega_n^۲\Delta u_i - ۹/۵۵\omega_n\dot{u}_i - ۳\ddot{u}_i$$

$$۵)\ u_{i+۱} = u_i + \Delta u_i \quad , \quad \dot{u}_{i+۱} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i \quad , \quad \ddot{u}_{i+۱} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$$



نکته بسیار مهم: کل زمان اِعمال بار برابر ($t_d = ۰/۲۵T_n$) می باشد، در نتیجه بعد از گام دوم، مطابق شکل مقابل چنان چه با همان اندازه گام قبلی یعنی ($\Delta t = ۰/۱T_n$) پیش رویم نقطه اتمام بارگذاری رَد می شود. بر این اساس می توان مطابق شکل مقابل پس از گام دوم، یک گام با ($\Delta t = ۰/۰۵T_n$) پیمود و جا به جایی و سرعت در نقطه انتهای بارگذاری را مشخص کرد؛ که روشی دقیق خواهد بود. سپس پاسخ در فاز ارتعاش آزاد قابل تعیین می باشد. لازم به ذکر است در این تمرین با توجه به فرض مسأله Δt تغییر داده نشده است:

i	$\frac{u_i}{(u_o)_{st}}$	$\frac{\dot{u}_i}{\omega_n(u_o)_{st}}$	$\frac{\ddot{u}_i}{\omega_n^۲(u_o)_{st}}$	η_i	$\Delta\eta_i$	$\frac{\Delta u_i}{(u_o)_{st}}$	$\frac{\Delta\dot{u}_i}{\omega_n(u_o)_{st}}$	$\frac{\Delta\ddot{u}_i}{\omega_n^۲(u_o)_{st}}$
۰	۰	۰	۱	۱	−۰/۱۶ (از رابطه)	۰/۱۵۴۳	۰/۴۲۳۰	−۰/۶۵۳۹
۱	۰/۱۵۴۳	۰/۴۲۳۰	۰/۳۴۶۱	۰/۸۴	−۰/۴۸ (از رابطه)	۰/۲۸۴۶	−۰/۰۱۸۹	−۰/۷۵۲۴
۲	۰/۴۳۸۹	۰/۴۰۴۱	−۰/۴۰۶۴	۰/۳۶	−۰/۳۶ (از شکل)	۰/۱۵۷۲	−۰/۳۳۴۴	−۰/۲۵۱۶
۳	۰/۶۰۰۲	۰/۰۶۹۸	−۰/۶۵۸۰	۰	۰	−۰/۰۶۵۲	−۰/۳۱۴۰	۰/۳۱۶۷
۴	۰/۵۳۰۹	−۰/۲۴۴۲	−۰/۳۴۱۲	۰	۰	−۰/۲۰۱۱	−۰/۱۲۰۴	۰/۲۹۹۳
۵	۰/۳۲۹۸	−۰/۳۶۴۶	−۰/۰۴۱۹	۰	۰	−۰/۲۲۴۴	۰/۰۳۵۸	۰/۱۹۷۹



* جدول صفحه قبلی ادامه داده شده و پاسخ سازه مطابق نمودار مقابل تعیین شده است. همان طور که برای بارهای ضربه ای بسیارکوتاه انتظار می رود، حداکثر پاسخ سیستم در فاز ارتعاش آزاد رخ داده است. همچنین به دلیل میرایی بالای سیستم (٪۴۰ = ξ)، فاز ارتعاش آزاد سریعاً از بین رفته است. حداکثر پاسخ سیستم از جدول قبل برابر است با:

$$\boxed{R_d^{\text{Newmark}} = \frac{u_o}{(u_o)_{st}} \approx ۰/۶۰}$$

* در سؤال شماره ۱ همین تمرینات این مسأله به صورت تحلیل حل شده و مقدار R_d بر اساس رابطه تحلیلی زیر تعیین شده است. با جاگذاری مقادیر مناسب تطابق مناسبی بین دو جواب دیده می شود:

$$R_d^{\text{Theoretical}} = \frac{۴\pi}{۳}\frac{t_d}{T_n}\exp\left(\frac{-\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}}\overbrace{\sin^{-۱}\sqrt{۱-\xi^۲}}^{\text{رادیان}}\right) \xrightarrow[\xi=۰/۴]{t_d/T_n=۰/۲۵} \boxed{R_d^{\text{Theoretical}} = ۰/۶۳}$$

با این حال تفاوت نسبتاً جزئی بین نتایج که در حدود ٪۴ می باشد، ممکن است ناشی از موارد زیر باشد:

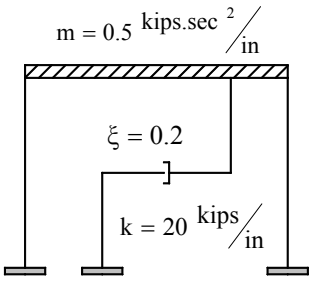
+ نکته اشاره شده در صفحه قبل در مورد اندازه گام‌های روش نیومارک و تأثیر آن بر برازش معادله بار.

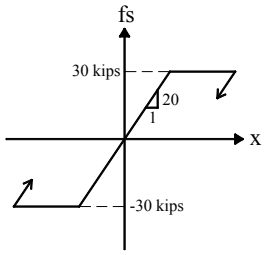
+ تقریب به کار رفته در تعیین رابطه $R_d^{\text{Theoretical}}$ که در سؤال شماره ۱ توضیح داده شد.

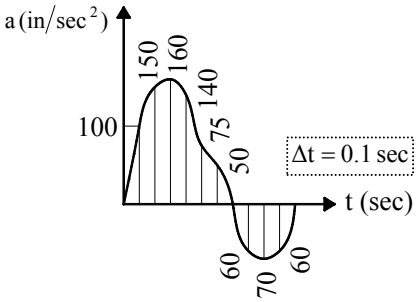
+ تقریب عمومی موجود در روش های عددی از جمله روش نیومارک.

---

۴) قاب زیر تحت اثر شتاب زمین قرار گرفته است. مطلوبست تعیین حداکثر جا به جایی **نسبی** ستون ها با فرض رفتار الاستیک پلاستیک کامل آن‌ها. دیاگرام تغییرات شتاب زمین بر حسب زمان ارائه شده است.







جواب: بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درسی و موجود در کتب مرجع[۱]، می توان مراحل روش نیومارک غیرخطی را به شکل زیرخلاصه نمود. در ابتدا لازم است مقادیر اولیه زیر محاسبه شوند.

$$P = -m\ddot{u}_g = -۰/۵a(t)\ \text{kips} \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۰/۵}} = ۶/۳۲۵\ \text{rad}/\text{sec}$$

$$c = ۲m\omega_n\xi = ۲\times ۰/۵\times ۶/۳۲۵\times ۰/۲ = ۱/۲۶۵\ \text{kips.sec}/\text{in}$$

$$\ddot{u}_o = \frac{P_o - c\dot{u}_o - ku_o}{m} = \frac{P_o}{m} = o\ \text{in}/\text{sec}^۲$$

$$a = \frac{۱}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c \xrightarrow[\text{Assume } \gamma = ۰/۵]{\text{Assume } \beta = ۰/۱۶۷} a = \frac{۶}{۰/۱}\times ۰/۵ + \frac{۶}{۲}\times ۱/۲۶۵ = ۳۳/۷۹۵$$

$$b = \frac{۱}{۲\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{۲\beta} - ۱\right)c \xrightarrow[\text{Assume } \gamma = ۰/۵]{\text{Assume } \beta = ۰/۱۶۷} b = \frac{۶}{۲}\times ۰/۵ + ۰/۱\left(\frac{۶}{۲\times ۲} - ۱\right)۱/۲۶۵ = ۱/۵۶۳$$

با داشتن مقادیر اولیه فوق می توان روند نیومارک غیرخطی را در هر جزءزمان با شش مرحله پیمود.

$$۱)\ \Delta\hat{P}_i = \Delta P_i + a\dot{u}_i + b\ddot{u}_i = -۰/۵\Delta a_i + ۳۳/۷۹۵\dot{u}_i + ۱/۵۶۳\ddot{u}_i$$

$$۲)\ \hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{۱}{\beta(\Delta t)^۲}m = k_i + ۳۳۷/۹۵$$

۳) تعیین Δu_i به کمک روش نیوتن رافسون اصلاح شده

$$۴)\ \Delta\dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(۱ - \frac{\gamma}{۲\beta}\right)\ddot{u}_i = ۳۰\Delta u_i - ۳\dot{u}_i - ۰/۰۵\ddot{u}_i$$

$$۵)\ \Delta\ddot{u}_i = \frac{۱}{\beta\Delta t^۲}\Delta u_i - \frac{۱}{\beta\Delta t}\dot{u}_i - \frac{۱}{۲\beta}\ddot{u}_i = ۶۰۰\Delta u_i - ۶۰\dot{u}_i - ۳\ddot{u}_i$$

$$۶)\ u_{i+۱} = u_i + \Delta u_i \quad , \quad \dot{u}_{i+۱} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i \quad , \quad \ddot{u}_{i+۱} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$$

می توان شتاب را از تعادل دینامیکی نیز تعیین نمود: $m\ddot{u}_{i+۱} = P_{i+۱} - c\dot{u}_{i+۱} - (f_s)_{i+۱}$

---

[۱] Dynamics of Structures, A. K. Chopra, 1995

* k_i سختی مماسی سیستم می باشد. داریم:

$$k_i = \begin{cases} ۰ & |f_s| \geq ۳۰ \ \& \ u\dot{u} > ۰ \quad \text{بارگذاری پلاستیک} \\ ۲۰ & \text{o.w.} \quad \text{بارگذاری الاستیک یا باربرداری} \end{cases}$$

همچنین در مورد روش نیوتن رافسون اشاره شده در مرحله شماره ۳ از صفحه قبلی می توان نوشت:

$$\hat{k}_T = \hat{k}_i \quad , \quad u_{i+۱}^{(o)} = u_i \quad , \quad f_s^{(o)} = (f_s)_i \quad , \quad \Delta R^{(۱)} = \Delta \hat{P}_i$$

$$۳-۱)\ \Delta u^{(j)} = \frac{\Delta R^{(j)}}{\hat{k}_T} \quad \Rightarrow \quad u_{i+۱}^{(j)} = u_{i+۱}^{(j-۱)} + \Delta u^{(j)}$$

$$۳-۲)\ \Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-۱)} + (\hat{k}_T - k_T)\Delta u^{(j)}$$

$$۳-۳)\ \Delta R^{(j+۱)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$$

تکرار تا همگرایی نتایج

* ضابطه همگراییِ نتایج در روش نیوتن رافسون عموماً به صورت مقابل می باشد:

$$\boxed{\frac{\Delta u^{(L)}}{\sum_{j=۱}^{L} \Delta u^{(j)}} \leq \varepsilon}$$

توضیح: در رفتار الاستیک- پلاستیک کامل[۱] نیازی به استفاده از روش نیوتن رافسون نیست؛ زیرا رفتار غیرخطی عملاً با دوخط مستقیم مدل شده است. با این حال در این تمرین، برای آشنایی دانشجو، از روش نیوتن رافسون اصلاح شده استفاده شده است. لازم به ذکر است که در روابط فوق، f_s نمایانگر نیروی فنر در اثر جا به جاییِ متناظر است. بر اساس مطالب فوق کُدی به کمک نرم افزار MATLAB نوشته شده است که پاسخ سازه را در محدوده بار و ارتعاش آزاد بعد از آن نشان می دهد. این کُد در انتهای نوشته ارائه شده است. نتایج حاصل در جدول صفحه بعد خلاصه شده اند. همان طور که ملاحظه می‌شود، سازه در انتهایِ ارتعاش، مشابه اشاره کتب مرجع[۲]، دارای **تغییرشکل نسبی پلاستیک** می باشد و به حالت اولیه خود باز نگشته است. میزان حداکثر پاسخ بر اساس جدول صفحه بعد تعیین شده است.

---

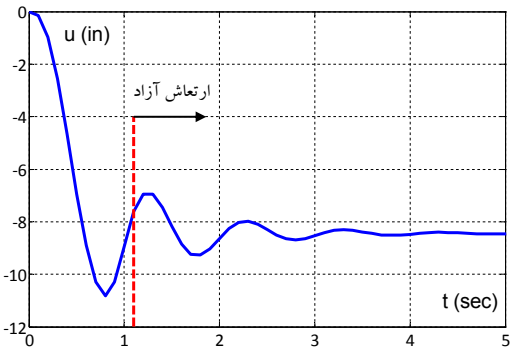
[۱] Elastic-Perfectly Plastic

[۲] Structural Dynamics, M. Paz & W. Leigh, 2004 , **Page 198**

Time	u	u̇	ü	Time	u	u̇	ü
۰	۰	۰	۰	۱/۱	−۷/۶۱۹۰	۱۰/۸۰۰۰	−۸۷/۳۲۴۱
۰/۱	−۰/۱۳۹۶	−۴/۱۹۰۵	−۸۳/۸۱۰۶	۱/۲	−۶/۹۴۲۸	۳/۰۴۹۹۶	−۶۷/۷۱۶۴
۰/۲	−۰/۹۷۱۱	−۱۲/۳۷۱۷	−۷۹/۸۵۴۵	۱/۳	−۶/۹۵۰۶	−۲/۹۴۶۰	−۵۲/۲۳۷۳
۰/۳	−۲/۵۶۱۱	−۱۸/۹۶۳۲	−۵۲/۰۲۳۰	۱/۴	−۷/۴۵۶۸	−۶/۶۸۳۲	−۲۲/۵۳۲۷
۰/۴	−۴/۶۶۸۴	−۲۲/۶۹۲۵	−۲۲/۵۸۸۰	۱/۵	−۸/۱۸۶۲	−۷/۳۸۸۰	۸/۴۲۵۲
۰/۵	−۶/۹۴۵۹	−۲۱/۸۱۲۱	۴۰/۱۸۴۶	۱/۶	−۸/۸۴۶۹	−۵/۴۶۷۲	۲۹/۹۹۵۰
۰/۶	−۸/۹۰۴۳	−۱۷/۱۳۶۱	۵۳/۳۵۴۴	۱/۷	−۹/۲۳۲۱	−۲/۱۲۱۳	۳۶/۹۳۷۹
۰/۷	−۱۰/۲۹۷۲	−۱۰/۱۸۱۸	۸۵/۷۵۹۸	۱/۸	−۹/۲۷۱۱	۱/۲۲۶۱	۳۰/۰۲۸۶
۰/۸	−۱۰/۸۳۰۰	۰/۰۹۲۴۰	۱۱۹/۷۶۶۲	۱/۹	−۹/۰۲۴۲	۳/۴۵۲۷	۱۴/۵۱۹۹
۰/۹	−۱۰/۲۸۴۴	۱۰/۱۹۶۵	۸۲/۳۷۶۵	۲	−۸/۶۳۴۸	۴/۰۵۰۱	−۲/۵۶۶۶
۱	−۸/۹۷۵۹	۱۴/۷۴۰۵	۸/۵۴۳۷	۲/۱	−۸/۲۶۳۷	۳/۱۶۳۲	−۱۵/۱۶۹۹

Time	u	u̇	ü	Time	u	u̇	ü
۲/۲	−۸/۴۱۵۸	۱/۴۰۴۳۶	−۲۰/۰۱۶۴	۳/۳	−۸/۴۱۵۸	۰/۰۰۰۶	−۵/۴۵۱۷
۲/۳	−۸/۳۳۴۴	−۰/۴۵۲۳	−۱۷/۱۲۶۶	۳/۴	−۸/۴۰۳۳	−۰/۴۴۱۱	−۳/۳۸۴۲
۲/۴	−۸/۳۰۶۶	−۱/۷۶۳۶۶	−۹/۱۰۹۴	۳/۵	−۸/۴۰۶۷	−۰/۶۴۱۳	−۰/۶۲۰۹
۲/۵	−۸/۳۳۰۳	−۲/۲۰۵۹	۰/۲۶۰۹	۳/۶	−۸/۴۲۱۵	−۰/۵۸۴۱	۱/۷۶۴۷
۲/۶	−۸/۳۸۶۷	−۱/۸۱۵۰	۷/۵۵۶۹	۳/۷	−۸/۴۴۰۳	−۰/۳۴۳۲	۳/۰۵۲۹
۲/۷	−۸/۴۵۰۰	−۰/۸۹۸۷	۱۰/۷۷۳۰	۳/۸	−۸/۴۵۶۰	−۰/۰۳۸۵	۳/۰۴۴۸
۲/۸	−۸/۴۹۷۴	۰/۱۲۴۵	۹/۶۹۶۵	۳/۹	−۸/۴۶۴۰	۰/۲۱۴۶	۲/۰۱۷۹
۲/۹	−۸/۵۱۶۵	۰/۸۸۹۰	۵/۵۹۸۴	۴	−۸/۴۶۳۲	۰/۳۴۲۱	۰/۵۳۲۴
۳	−۸/۵۰۶۹	۱/۱۹۳۵	۰/۴۹۳۰	۴/۱	−۸/۴۵۵۷	۰/۳۲۷۹	−۰/۸۱۶۵
۳/۱	−۸/۴۷۷۸	۱/۰۳۳۴	−۳/۶۹۵۱	۴/۲	−۸/۴۴۵۶	۰/۲۰۶۸	−۱/۶۰۵۷
۳/۲	−۸/۴۴۳۲	۰/۵۶۰۹	−۵/۷۵۶۷	۴/۳	−۸/۴۳۶۶	۰/۰۴۲۱	−۱/۶۸۹۵

با ادامه جدول فوق، که بر اساس نتایج برنامه نوشته شده توسط دانشجو تنظیم شده است، می توان پاسخ سازه را مطابق شکل مقابل رسم نمود. حداکثر پاسخ سیستم در فاز بار بوده و مقدار آن برابر است با: $u_o = -۱۰/۸۳\,in$



کُد نوشته شده در MATLAB برای تحلیل دینامیکی غیرخطی با روش نیومارک (سؤال ۴)

```
%==========================================================================
% Sina Kazemzadeh Azad - Amirkabir University of Technology
% Dynamics of Structures - Instructor: Dr. Taghikhani
% Exercise No.3 - Question No.4
%==========================================================================

%% Input Data-------------------------------------------------------------

u=0; ud=0; udd=0; ki=20; fs=0;                  %Initial Conditions
U(1)=u; Ud(1)=ud; Udd(1)=udd;                   %Initial Conditions
a=[0,100,150,160,140,75,50,0,-60,-70,-60,0];    %Ground Motion
a(1,12:101)=zeros;                              %Free Vibration Phase
P=-0.5*a;                                       %Equivalent Load

%% Newmark's Method-------------------------------------------------------

for i=1:100 %With Delta(t)=0.1

    U(i)=u; Ud(i)=ud; Udd(i)=udd;
    Da=a(1,i+1)-a(1,i);
    DP=(-0.5*Da)+(33.795*ud)+(1.563*udd);

%% Tangent Stiffness------------------------------------------------------

   ki=20;                           %Elastic Loading or Unloading
   if abs(fs)>=30 && (u*ud)>=0      %Plastic loading
      ki=0;
   end
   khi=ki+337.95;

%% Modified Newton-Raphson------------------------------------------------

   Flag=0;
   khT=khi; v=u; fs2=fs; DR=DP; ZDv=0;
   while Flag==0
         fs1=fs2;
         Dv=DR/khT; v=v+Dv;
         fs2=fs1+(ki*Dv);
         if fs2>30
            fs2=30;
         elseif fs2<-30
            fs2=-30;
         end
         Df=fs2-fs1+((khT-ki)*Dv);
         DR=DR-Df;
         ZDv=ZDv+Dv;
         if (Dv/ZDv)<0.001
             Flag=1;
         end
   end
   Du=ZDv;
   fs=fs2;

%% Delta(U) has been found------------------------------------------------

   Dud=(30*Du)-(3*ud)-(0.05*udd);
   u=u+Du; ud=ud+Dud;
   udd=((-0.5*a(i+1))-(1.265*ud)-fs2)/0.5;  %From the Equilibrium Equation

%% Program Ends Here------------------------------------------------------

end
```